

A HIPERGEOMETRIKUS ELOSZLÁSTÓL AZ OC-GÖRBÉIG

Dr. Balázs L. György
65. születésnapjára ajánlva



Dr. Kausay Tibor

<https://doi.org/10.32969/VB.2023.3.1>

A 65. éves Balázs L. György egyetemi tanár úr tiszteletére 2023. április 28-án, a Műegyetemen „Korszerű betonelemek a fenntartható jövő érdekében” címmel szimpóziumot rendeztek. Az ünnepi szimpóziumon és e cikkben azt az utat tekintettük át, amely a hipergeometrikus valószínűségi eloszlástól az OC-görbéig vezet.

Kulcsszavak: beton, binomiális-eloszlás, Gauss-féle normális eloszlás, hipergeometrikus-eloszlás, matematikai statisztika, megfeleléség, nyomószilárdság, OC-görbe Student-féle t-eloszlás, szemalak, szemhalmaz

1. BEVEZETÉS

Az 1958-as esztendő igen nevezetes volt, két okból is. Egyrészt ekkor született Balázs György László, a ma ünnepelt egyetemi tanár (1. ábra); másrészt ekkor jelent meg K. Stange cikke a Metrika folyóiratban arról, hogy a kettős valószínűségi hálózatban az elfogadási jelleggörbe (működési jelleggörbe, röviden: OC-görbe, angolul: Operating characteristic curve; németül: Annahmekennlinie, Operationscharakteristik, OC-Kurve) egyenessé válik, és két pontra fektetett vonallal egyszerűen meghatározható (Stange, 1958). Ezt követően 1964-ben Jusius Bonzel és Wilhelm Manns írt a Betontechnische Berichte folyóiratban a betonnyomószilárdság az OC-görbe segítségével való értékeléséről (Bonzel et al., 1969). Hazánkban Windisch Andor tanár úr 1982-ben így fogalmazott „A beton minőségellenőrzése” című könyv 102. oldalán: „Az OC-görbét egyetlen pontjával ($p, A_{(p)}$) és a hozzá tartozó próbatesterszámmal (n) is megadhatjuk” (Windisch, 1982).

E cikk szerzője az 1960-as évek végén munkahelyi feladatuk annak vizsgálatát kapta, mi a valószínűsége annak, hogy az N szemcséből álló és M nem megfelelő szemelakú szemcsét tartalmazó zúzottkő halmazból vett n elemű mintában lévő nem megfelelő szemelakú szemcsék száma k . A szerző a kérdésre a

1. ábra: Jelen előadás nyitóképe a „Korszerű betonelemek a fenntartható jövő érdekében” a szimpóziumon Balázs L. György egyetemi tanár úr tiszteletére 65. születésnapja alkalmából, 2023. április 28-án BME Díszteremben (Kausay, 2023)

PROF. DR. BALÁZS L. GYÖRGY
köszöntése
65.
születésnapja alkalmából
Budapest, 2023. április 27.

Képek az OC-görbe megismeréséről
és egyébekről...
Bilder über Erkenntnis der OC-Kurve und andere...
Dr. Kausay Tibor

Nemzetközi konferencia
a BME Dísztermében
Budapest, 2023. április 28.



választ a hipergeometrikus valószínűségi eloszlásból kiindulva keresvén megszerkesztette a binomiális valószínűségi eloszlás transzformált eloszlásgörbét, amelyről akkor föl sem merült benne, hogy az OC-görbére jutott (Kausay, 1968 és 1970)

2. HIPERGEOMETRIKUS VALÓSZÍNŰSÉGI ELOSZLÁS

Adott p hibaarányú ($p = M/N$ alulmaradási hányadú, azaz M hibás elemet tartalmazó N elemszámú) tétel elfogadásának (átvételének) valószínűsége ($L = A_{(p)}$) az n elemszámú mintában talált nem megfelelő (hibás) elemek c számától, valamint a p és a c/n hányados kapcsolatát kifejező valószínűségi eloszlás fajtájától függ (Rinne et al., 1995), (Windisch, 1982):

- hipergeometrikus valószínűségi eloszlás esetén:

$$L(p|N;n;c) = \text{Hi}(c|N;M;n) = \text{Hi}(c|N;N \times p;n)$$

- binomiális valószínűségi eloszlás esetén:

$$L(p|n;c) = \text{Bi}(p|n;c)$$

- Poisson-eloszlás esetén: $L(p|n;c) = \text{Po}(c|n \times p)$

A p hibaarányú (tényleges alulmaradási hányadú) tétel elfogadásának (átvételének) valószínűsége ($A_{(p)}$) mind a mintában lévő $c = k$ megengedett nem megfelelő (hibás) elemek számának növekedésével, mind a minta n elemszámának csökkenésével növekszik.

Annak valószínűsége, hogy az N elemű, M nem megfelelő elemet tartalmazó halmazból visszatevés nélküli reprezentatív mintavétellel nyert n elemű mintában a nem megfelelő elemek száma k , a P_k hipergeometrikus valószínűségi eloszlással számítható ki:

$$P_k = \frac{\binom{M}{k} \times \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

A valószínűséget pontosan leíró hipergeometrikus eloszlás esetén a visszatevés nélküli mintavétel következtében minden egyes mintaelem kivételkor megváltozik a halmaz eredeti $p = M/N$ alulmaradási hányada. A hipergeometrikus eloszlás felhasználás nehézsége, hogy nagy N számok mellett a valószínűségek kiszámítása igen körülményes. Ezért azzal a közelítő feltételezéssel szokás élni, hogy a minta elemei csak az adott elem vizsgálatának idejére kerülnek ki a halmazból.

3. BINOMIÁLIS VALÓSZÍNŰSÉGI EL-OSZLÁS

Az ilyen visszatevéses reprezentatív mintavétel esetén a nem megfelelő elemek részaránya a halmazban változatlan marad, azaz $p = M/N = \text{konstans}$. Ebben az esetben a visszatevéses mintavétel feltételezése mellett a keresett valószínűséget a könnyebben meghatározható

$$B_k = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

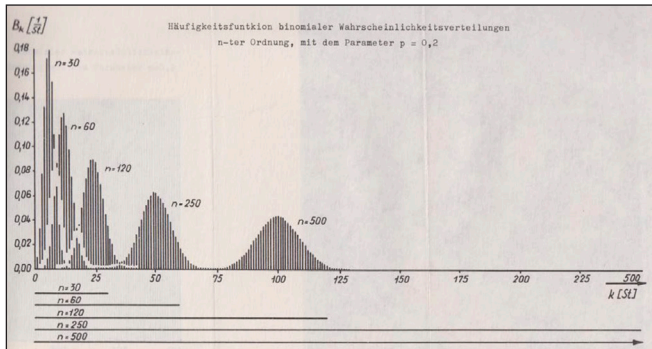
binomiális valószínűségi eloszlás fejezi ki, ahol $k = 0, 1, 2, \dots, n$ és $0 \leq p \leq 1,0$.

Példaként vizsgáljuk meg, mi a valószínűsége (B_k) annak, hogy különböző p alumaradási hányadú tételekből $n = 100$ elemszámú mintát véve a nem megfelelő elemek száma a mintában k . A választ a 100-adrendű, p paraméterű binomiális valószínűségi eloszlás gyakoriságfüggvényei adják meg (2/a. és 2/b. ábra). A binomiális eloszlás diszkrét eloszlás, de a szemléletesség kedvéért a 2020. évben számítógéppel rajzolt ábrákon az egyes valószínűségeket ábrázoló pontokat folyamatos vonallal összeköttöttük. A 2/b. ábrán látni, hogy a binomiális eloszlás nem szimmetrikus, hanem egyre inkább jobbra elnyúló (jobbra egyre ferdebb), ha p értéke tart a nullához. A binomiális eloszlás a $p = 0,5$ értéknél szimmetrikus, és attól $p = 0,0$, illetve $p = 1,0$ felé távolodva egyre ferdebb (jobbra, illetve balra). Ennek következménye, hogy esetünkben – lévén jobbra ferde eloszlás – a módusznál nagyobb a medián, és a mediánnál nagyobb a k független valószínűségi változó számtani középértéke (várható értéke).

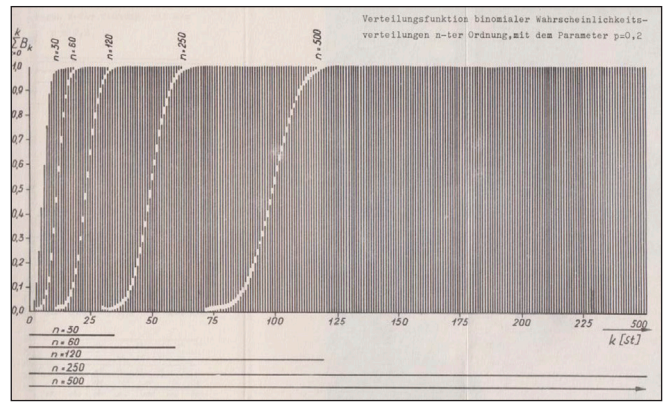
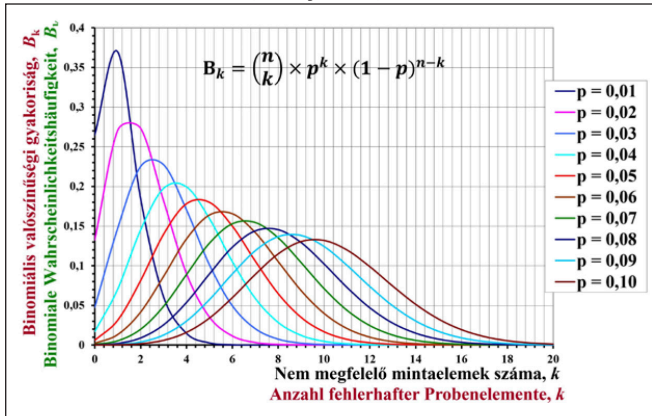
A módusz a legnagyobb B_k valószínűséghez tartozó valószínűségi változó ($k_{\text{módusz}}$), itt a gyakoriságfüggvénynek maximuma, az eloszlásfüggvénynek inflexiós pontja van.

A medián az a valószínűségi változó ($k_{\text{medián}}$), amelynél az

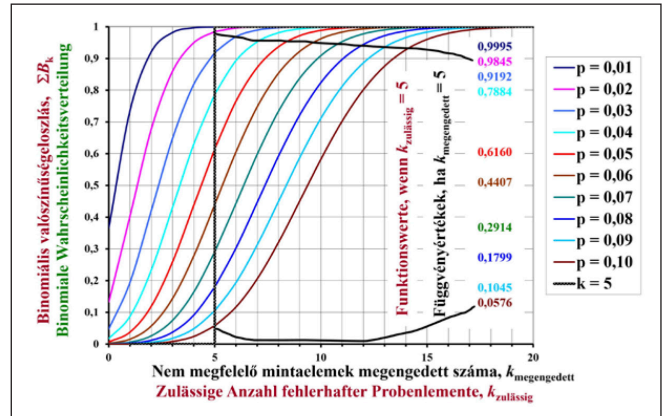
2/a. ábra: Binomiális valószínűségi eloszlás n -ed rendű gyakoriságfüggvényei, ha a halmaz eredeti alumaradási hányada $p = M/N = 0,2$ (Kausay, 1968)



2/b. ábra: Binomiális valószínűségi eloszlás gyakoriságfüggvényei, ha a mintaelemszám $n = 100$ (Kausay, 2023)



3/a. ábra: Binomiális valószínűségi eloszlás n -ed rendű eloszlásfüggvényei, ha a halmaz eredeti alumaradási hányada $p = M/N = 0,2$ (Kausay, 1968)



3/b. ábra: Binomiális valószínűségi eloszlás eloszlásfüggvényei, ha a mintaelemszám $n = 100$ (Kausay, 2023)

eloszlásfüggvény $\Sigma B_k = 0,5$ értéket vesz fel, feltéve, hogy ilyen létezik (Vincze E., 1972; Vincze I., 1958).

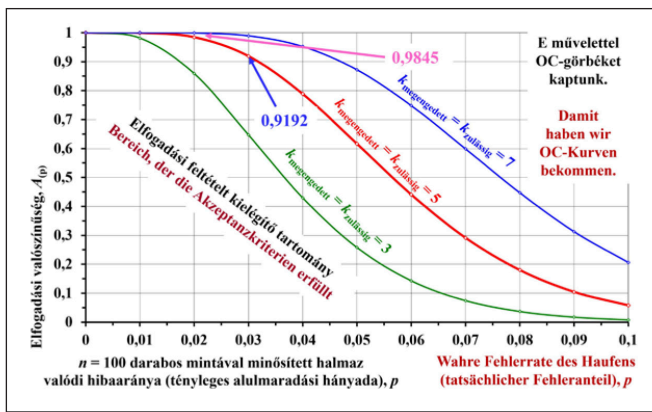
A binomiális valószínűségi eloszlás gyakoriságfüggvényeiből meghatározhatók az eloszlásfüggvények, amelyek azt fejezik ki, mi a valószínűsége (ΣB_k) annak, hogy különböző p alumaradási hányadú tételekből példánk szerint $n = 100$ elemszámú mintát véve, a nem megfelelő elemek megengedett száma a mintában $k_{\text{megengedett}}$ (3/a. és 3/b. ábra).

A 3/b. ábra valószínűségi eloszlásfüggvényeiből leolvasható, hogy a tételből $n = 100$ elemszámú mintát véve, annak a valószínűsége, hogy a nem megfelelő mintaelemek megengedett száma – mint a tétel elfogadásának feltétele – $k_{\text{megengedett}} = 5$, például $p = 0,01$ alumaradási hányadú tétel esetén 0,9995, $p = 0,02$ alumaradási hányadú tétel esetén 0,9845, $p = 0,03$ alumaradási hányadú tétel esetén 0,9192 stb.

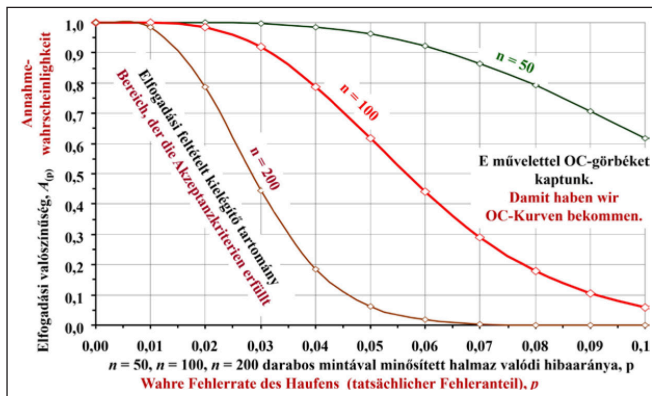
4. A BINOMIÁLIS ELOSZLÁS TAPASZTALATI ALUMARADÁSI HÁNYAD SZERINT STANDARDIZÁLT OC-GÖRBÉJE

A 3/b. ábra $k_{\text{megengedett}} = 5$ abszcisszájához tartozó ($p, \Sigma B_k$) értékpárokat új koordináta-rendszerben ábrázolva és folyamatos vonallal összekötve, a p (tényleges alumaradási hányad) független változójú $\Sigma B_k = A(p)$ elfogadási valószínűségi görbét kapjuk meg (4. ábra középső görbe). E műveletet a $k_{\text{megengedett}} = 3$ és a $k_{\text{megengedett}} = 7$ abszcisszájához tartozó ($p, \Sigma B_k$) értékpárokkal is elvégezve kapjuk a 4. ábrán látható másik két, p független változójú elfogadási valószínűségi görbét.

A binomiális valószínűségi eloszlás különböző n -ed rendű



4. ábra: Elfogadási valószínűségi görbe – OC-görbe – binomiális eloszlás feltételezésével, ha a mintaelemszám $n = 100$ és a nem megfelelő mintaelemek megengedett száma $k_{\text{megengedett}} = 3$, $k_{\text{megengedett}}/n = 0,03$; $k_{\text{megengedett}} = 5$ és $k_{\text{megengedett}} = 7$, azaz rendre $k_{\text{megengedett}}/n = 0,05$ és $k_{\text{megengedett}}/n = 0,07$ (Kausay, 2023)



5. ábra: Elfogadási valószínűségi görbe – OC-görbe – binomiális eloszlás feltételezésével, ha a mintaelemszám $n = 50$, $n = 100$ és $n = 200$, és a nem megfelelő mintaelemek megengedett száma $k_{\text{megengedett}} = 5$, azaz rendre $k_{\text{megengedett}}/n = 0,100$; $k_{\text{megengedett}}/n = 0,050$ és $k_{\text{megengedett}}/n = 0,025$ (Kausay, 2023)

eloszlásfüggvényeiből kiindulva hasonlóképpen szerkeszthetők meg az 5. ábra különböző n -ed rendű p független változójú $\sum B_k = A(p)$ elfogadási valószínűségi görbéi, ha a nem megfelelő elemek megengedett száma a mintában $k_{\text{megengedett}} = 5$.

A 4. és 5. ábrán megszerkesztett görbék a binomiális eloszlás OC-görbéi. A görbe alatti tartomány az elfogadási feltételt kielégítő esetek, a görbe feletti tartomány az elfogadási feltételt ki nem elégítő megjelenési helye.

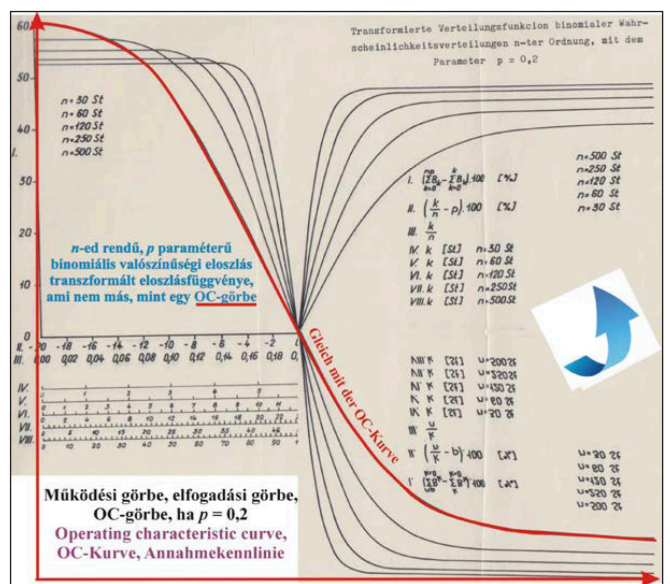
Tekintve, hogy a 4. és 5. ábra az optimális mintaelemszám kiválasztására nem eléggé szemléletes, célszerű a tapasztalati alulmaradási hányad (k/n) szerint standardizált $(k/n - p)$ elfogadási valószínűségi görbéket $(k/n - p) \times 100$ abszcissa beosztású (az alulmaradási hányad szerinti standardizálás) és

$$\left| \sum_{k=0}^{n/p} B_k - \sum_{k=0}^k B_k \right| \times 100$$

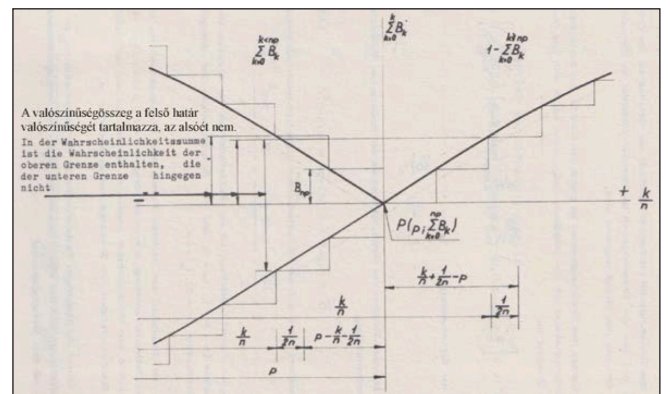
ordináta beosztású koordináta-rendszerbe transzformálni (6. ábra). A 6.-9. ábrákon a transzformált diszkrét eloszlásfüggvény – a negatív féltengelyen alsó, a pozitív féltengelyen felső – folytonos burkológörbéjét tüntettük fel a 7. ábra vázlatá szerinti.

A 9. ábrán látható, hogy a mintavétel ítéletének adott p hibaarányhoz (tényleges alulmaradási hányadhoz) tartozó megbízhatósága annál nagyobb, mennél szűkebb a binomiális transzformált eloszlásfüggvény – a tapasztalati alulmaradási hányad szerint standardizált OC-görbe – két szárának, azaz az ollónak a nyílása.

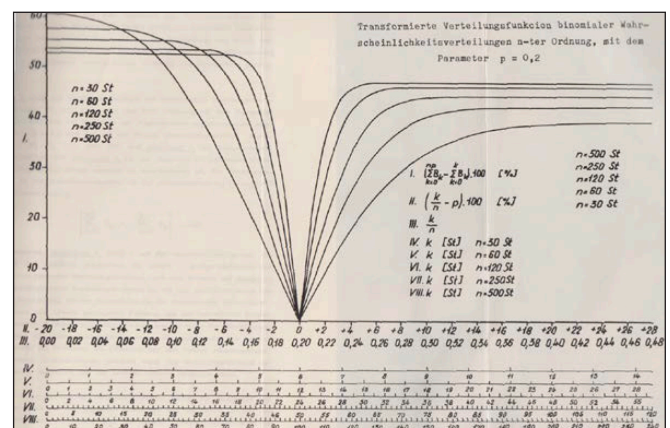
Valamely mintavétel ítéleteinek adott hiba-



6. ábra: A tapasztalati alulmaradási hányad (k/n) szerint standardizált binomiális elfogadási valószínűségi görbék – a tapasztalati alulmaradási hányad szerint standardizált OC-görbék – transzformálása (Kausay, 2023)

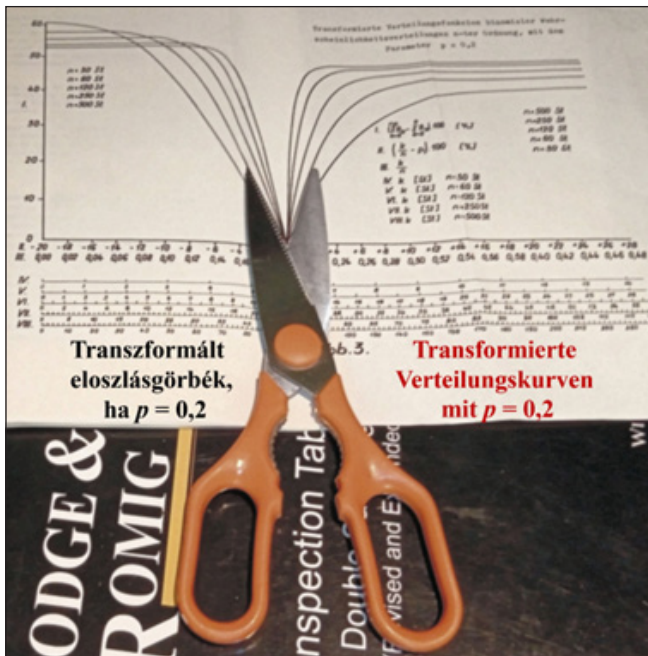


7. ábra: A binomiális valószínűségi eloszlás tapasztalati alulmaradási hányad (k/n) szerint standardizált eloszlásfüggvénye transzformálásának vázlatá (Kausay, 1968)



8. ábra: n -ed rendű, $p = 0,2$ alulmaradási hányadú, a tapasztalati alulmaradási hányad (k/n) szerint standardizált binomiális valószínűségi eloszlások transzformált eloszlásfüggvényei (Kausay, 1968)

részhányadhoz tartozó megbízhatósága mérőszámául jól használható az ún. biztonsági index (I), amelyen a transzformált eloszlásfüggvény két szára, azok abszcisszával párhuzamos érintői és a zérus abszcisszájú egyenes által határolt területet ez utóbbira vett elsőrendű nyomatéka abszolútértékének összegét értjük. Az elsőrendű nyomaték ugyanis kellőképpen kihangsúlyozza az abszolútértékre nagyobb ítélethibánál fellépő valószínűségösszeg kedvezőtlenebb szerepét. A tagonkénti nyomatékszámítást



9. ábra: A mintavétel ítéletének megbízhatósága az binomiális valószínűségi eloszlás tapasztalati alulmaradási hányad (k/n) szerint standardizált és transformált eloszlásfüggvénye – a tapasztalati alulmaradási hányad szerint standardizált OC-görbe – alapján (Kausay, 2023)

elkerülhetjük a biztonsági index (I) és a valószínűségeloszlás szórásnégyzete közötti összefüggés felhasználásával.

Míthogy a binomiális valószínűségeloszlás szórásnégyzetének a p tényleges alulmaradási hányaddal és az n mintaelemszámmal kifejezett összefüggése:

$$\sigma^2 = n \times (p - p^2)$$

a biztonsági index képlete (Kausay, 1968):

$$I = \frac{10^6}{2} \times \frac{p - p^2}{n}$$

A biztonsági index nevezetlen szám. A biztonsági index képletéből kiolvasható, hogy a biztos mintavétel ($n = \infty$) biztonsági indexe $I_{n=\infty} = 0$, a lehetetlen mintavételé ($n = 0$) pedig $I_{n=0} = \infty$. Például a 8. ábrán ábrázolt $p = 0,2$ alulmaradási hányadú binomiális OC-görbék biztonsági indexe (Kausay, 1968):

$n = 30$ db	$I = 2667$
$n = 60$ db	$I = 1333$
$n = 120$ db	$I = 667$
$n = 250$ db	$I = 320$
$n = 500$ db	$I = 160$.

5. A T-ELOSZLÁS TÉNYLEGES ALULMARADÁSI HÁNYAD SZERINTI OC-GÖRBÉJE

A megszilárdult beton nyomószilárdságának 5%-os alulmaradáshoz tartozó jellemző értékét az MSZ EN 1990:2011 Eurocode szabvány D7.2 szakasza szerint a t valószínűségi eloszlásnak az n mintaelemszámtól függő valószínűségi változója, a *Student*-tényező alkalmazásával határozzuk meg. A mintaelemszám növekedésével a t -eloszlás egyre jobban megközelíti a *Gauss*-féle normális eloszlást (10. ábra). A visszavont MSZ 4720-2:1980 szabvány szilárdsági előírása

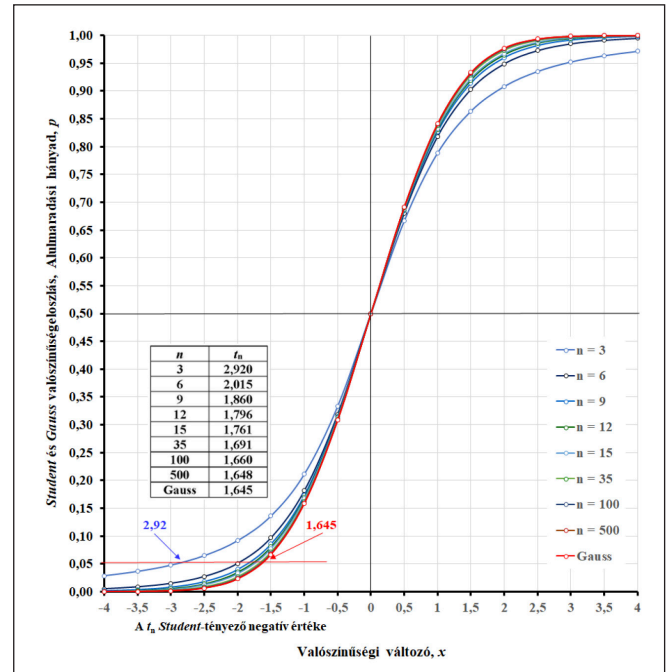
is azon a feltételezésen alapult, hogy a szabványos betonok nyomószilárdságának eloszlása a *Gauss*-féle normális eloszlásnak, illetve az azt közelítő *Student*-féle eloszlásnak felel meg.

A t -eloszlás (*Student*-eloszlás) tényleges alulmaradási hányad ($p = M/N$) szerinti OC-görbájéből (11. ábra) azt olvashatjuk le, hogy mekkora valószínűséggel vesszük át (fogadjuk el) a p alulmaradási hányadú tételt, ha a minta elemszáma n . Ha a hibás elemek részaránya a megengedett $p_{50\%} = 5\%$ -nál kisebb, akkor az átvétel valószínűsége 50%-nál nagyobb; ha a hibás elemek részaránya a megengedett $p_{50\%} = 5\%$ -nál nagyobb, akkor az átvétel valószínűsége 50%-nál kisebb, ha pedig éppen $p_{50\%} = 5\%$, akkor az átvevő és a gyártó kockázata ugyanakkora (50%).

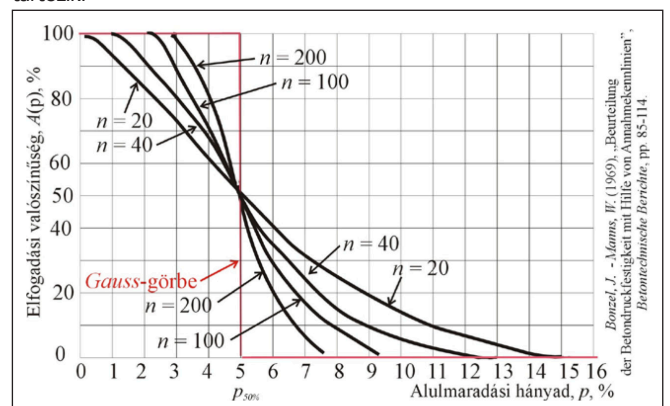
E görbék sajátja, hogy az elfogadási valószínűség ($A(p)$) értéke a megengedett $p_{50\%}$ tényleges alulmaradási hányad esetén az n mintaelemszámtól függetlenül $A(p) = 0,5$, más szóval a t -eloszlás $p_{50\%}$ tényleges megengedett alulmaradási hányadhoz tartozó OC-görbéi a $(p_{50\%}, A(p)) = (0,5)$ pontban metszik egymást.

Ha az adott $p_{50\%}$ abszcissza függőlegesen az OC-görbék metszéspontja feljebb tolódik, azaz $A(p) > 0,5$, akkor az OC-

10. ábra: A t -eloszlás (*Student*-eloszlás) eloszlásfüggvényei különböző n mintaelemszámok esetén. A *Gauss*-féle eloszlás az $n = \infty$ mintaelemszámhoz tartozik.



11. ábra: A t -eloszlás (*Student*-eloszlás) elfogadási valószínűségi görbéi – OC-görbe – ha a mintaelemszám $n = 20$, $n = 40$, $n = 100$ és $n = 200$, és a nem megfelelő elemek megengedett részaránya a tételben $p_{50\%} = 5$. A *Gauss*-féle eloszlás az $n = \infty$ mintaelemszámhoz tartozik.



görbe nem a t -eloszlás származéka, és minthogy a hozzá tartozó átvételi valószínűség 50%-nál nagyobb, a nyomószilárdság értékelési feltétel „gyártóbarát” ahogy azt *Hosser* és *Gensel* az EN 206 (napjainkban: MSZ EN 206:2013+A2:2021) szabvány betonszilárdság-megfelelőségi igazolásáról szólva nevezte (*Hosser et al., 1995*).

6. ÖSSZEFOGLALÁS

Az OC-görbe (nevezik működési vagy elfogadási jelleggörbének is) valamely p alulmaradási hányadú tétel $A(p)$ elfogadási valószínűségét adja meg, ha a minta elemeinek n száma.

Az OC-görbével választ kaphatunk a kérdésre, hogy milyen mértékben tükrözi vissza az n -elemű minta minősítéses vizsgálati eredménye a halmaz p hibaaarányát; vagy hogy a megfelelés követelményétől függően mekkora a p hibaaarányú halmaz elfogadásának, illetve elutasításának valószínűsége.

Törekvésünk, hogy az átvevő kockázata ne legyen több, mint 50%, ha az értékelési időszak alatt az összes lehetséges eredmény alapsokaságának pontosan 5%-a van a vizsgált tulajdonság követelmény értéke alatt (a meg nem felelő minőségű terméket a vevő átveszi), illetve a gyártó kockázata ne legyen több, mint 50%, ha az értékelési időszak alatt az összes lehetséges eredmény alapsokaságának pontosan 5%-a van a vizsgált tulajdonság követelmény értéke felett (a megfelelő minőségű termék átvételét a vevő elutasítja).

Előírás, hogy a 100 év tervezési élettartamú szerkezetek betonjának elfogadási valószínűsége ne legyen több, mint ~50%, amely követelményt minden Eurocode 2 (MSZ EN 1992) szerint tervezett 50 év tervezési élettartamú szerkezet betonja esetén is ajánlott betartani (MSZ 4798:2016/4M:2023).

A binomiális valószínűségi eloszlás és a *Student*-féle t -eloszlás OC-görbéje e célkitűzés elérésének eszköze.

Miután áttekintettük az utat, amely a hipergeometrikus

valószínűségi eloszlástól az OC-görbéig vezet, személyes gondolatokkal köszöntöttük a 65. születésnapját ünneplő *Balázs L. György* egyetemi tanár urat (12. ábra).

7. HIVATKOZOTT SZABVÁNYOK

- MSZ 4720-2:1980 „A beton minőségének ellenőrzése. Általános tulajdonságok ellenőrzése”. Visszavont szabvány
 MSZ 4798:2016/4M:2023 „Beton. Műszaki követelmények, tulajdonságok, készítés és megfelelés, valamint az EN 206 alkalmazási feltételei Magyarországon”
 MSZ EN 206:2013+A2:2021 „Beton. Műszaki követelmények, teljesítőképesség, készítés és megfelelés”
 MSZ EN 1990:2011 „Eurocode: A tartószerkezetek tervezésének alapjai”
 MSZ EN 1992 „Eurocode 2: Betonszerkezetek tervezése” szabványsorozat

8. HIVATKOZOTT IRODALOM

- Bonzel, J. – Manns, W. (1969), „Beurteilung der Betondruckfestigkeit mit Hilfe von Annahmekennlinien”, *Beton-technische Berichte*, pp. 85-114. Beton-Verlag. Düsseldorf, 1970.
 Hosser, D. – Gensel, B. (1995), „Kritische Bewertung der Statistik beim Konformitätsnachweis der Betonfestigkeit nach prEN 206”, *Schlussbericht, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz (IBMB) TU Braunschweig*. Braunschweig, 1995.
 Kausay T. (1968), „Die Kornzahl einer Probe bei der Bewertungskornformprüfung”, No. 11. Mitteilung des Zentrales Forschungs- und Projektierungsinstitut der Silikatindustrie (SZIKKTI), *Építésügyi Tájékoztatói Központ (ÉTK)*. Budapest, 1968.
 Kausay T. (1970), „A szemcsealak minősítéses vizsgálatának mintaelemszáma”, *Mélyépítéstudományi Szemle*, XX. évf. 8. szám pp. 373-388.
 Kausay T. (2020): „OC-görbe, működési jelleggörbe, elfogadási jelleggörbe”, Fejezet az elektronikus „Betonos”könyv”-ben, <http://www.betonos-e-konyv.hu/book.php?pdf=betekon-101-6-2.pdf&fb3d-page=1>
 Kausay T. (2023), „Prof. Dr. Balázs L. György köszöntése 65. születésnapja alkalmából”, <http://www.betonopus.hu/mellekletek/balazsgyorgy65.mp4>
 Rinne, H. – Mittag, H.-J. (1995), „Statistische Methoden der Qualitätssicherung”, 3., überarbeitete Auflage, *Carl Hanser Verlag*. München, Wien, 1995.
 Stange, K. (1958) „Die zeichnerische Behandlung von Plänen für messende Prüfung”, *Metrika*, Vol. 1. No. 1. pp. 111-129. <https://doi.org/10.1007/BF02613400>
 Vincze E. (1972), „Valószínűségi számítás” a „Műszaki matematika” sorozat V. kötete, *Tankönyvkiadó*. Budapest, 1972.
 Vincze I. (1958), „Statistikai minőségellenőrzés. Az ipari minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszerei” (szerk.: Vincze I.), *Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó*. Budapest, 1958.
 Windisch A. (1982), „Valószínűségelméleti és matematikai statisztikai alapismeretek”, in: „A beton minőségellenőrzése” (szerk.: Szalai K.), pp. 44-112., a *Szabványosítási Szakkönyvtár 26.* kiadványa, Szabványkiadó. Budapest, 1982.

Dr. Kausay Tibor (1934) okl. építőmérnök (1961), vasbetonépítési szakmérnök (1967), egyetemi doktor (1969), a műszaki tudomány kandidátusa (1978), Ph.D. (1997), címzetes egyetemi docens (1985), címzetes egyetemi tanár a BME Építőanyagok és Magasépítés Tanszéken (2003), a *fib* Magyar Tagozat tagja (2000), az MTA gróf Lónyay Menyhért emlékérmese (2003), a Palotás László-díj birtokosa (2015). Tevékenysége a betontechnológiai és a kő- és kavicsipari kutatásra, fejlesztésre, szakértésre, oktatásra, szabványosításra terjed ki. Publikációinak száma mintegy 220.

12. ábra: Az előadás záróképe (Kausay, 2023)

